

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

**Definition.** In einem Maßraum  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  wird eine Folge darauf messbarer Funktionen  $f_n$  fast gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion  $f$  genannt, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Menge  $A \in \mathcal{A}$  existiert, sodass  $\mu(A) < \varepsilon$  und  $f_n$  auf dem Komplement  $\Omega \setminus A$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

Sei  $\mu$  ein endliches Maß auf  $X$ . Seien  $f_n, f$   $\mu$ -messbar und fast überall endlich derart, dass  $f_n$  fast gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Zeigen Sie, dass  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -fast überall.  
*Bemerkung:* Dies ist im gewissen Sinne die Umkehrung vom Satz von Egorov.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und gilt  $\int_A f d\mathcal{L}^1 = 0$ , für alle messbare Mengen  $A \subset \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $f = 0$   $\mathcal{L}^1$ -fast überall in  $\mathbb{R}$ .

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Sei  $f \in L^\infty(X)$ . Zeigen Sie:

- $\|f\|_\infty = \sup\{M; \mu\{|f| \geq M\} \neq \emptyset\}$
- $\|f\|_\infty = \inf\{\sup_{x \in X} |g(x)|; g = f \text{ fast überall in } X\}$ .

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

**Definition.** 1). Ein normierter Raum  $(X, \|\cdot\|)$  heißt separabel, falls es eine abzählbare, dichte Teilmenge gibt.

2) Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Dann heißt  $\mu$  separabel, falls es Mengen  $E_i \in \mathcal{A}$  für  $i \in \mathbb{N}$  mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- $\mu(E_i) < \infty$  für  $i \in \mathbb{N}$ .
- Für jedes  $E \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(E) < \infty$  und  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $\mu(E \Delta E_i) < \epsilon$ .

a) Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $\mu$  separabel. Zeigen Sie, dass  $L^1(\mu)$  separabel ist.  
*Tipp:* Sei  $S_0$  die Menge der Funktionen der Form  $\sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{E_i}$  mit  $N \in \mathbb{N}$  und  $\alpha_i \in \mathbb{Q}$  und  $E_i$  wie in der Definition. Zeigen Sie, dass  $S_0$  dicht in der Menge  $S$  der Funktionen der Form  $\sum_{i=1}^N s_i \chi_{A_i}$  mit  $N \in \mathbb{N}$  mit  $s_i \in \mathbb{Q}$ ,  $A_i \in \mathcal{A}$  und  $\mu(A_i) < \infty$  ist. Nutzen Sie  $|\chi_A - \chi_B| \leq \chi_{A \Delta B}$ .

b) Zeigen Sie, dass  $\lambda^n$  separabel ist. Folgern Sie, dass  $L^1(\Omega)$  für jede offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  separabel ist.

*Tipp:* Approximieren Sie zunächst die offene Menge durch geeignete Quader.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 7.1.13 bis 12:00.**

---

**Frohe Weihnachten!**